KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 3. predavanje

Prisjetimo se da smo prošli put dokazali:

Cauchyjev teorem za derivaciju. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi: f ima primitivnu funkciju na Ω ako i samo je $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.

Goursat-Pringsheimov teorem. Ako je f derivabilna funkcija na Ω, tada je

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall \Delta \subseteq \Omega.$$

Također smo vidjeli da holomorfna funkcija na Ω ne mora imati primitivnu funkciju na Ω. (Primjer: $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Ako je međutim skup Ω zvjezdast (definicija slijedi), onda će holomorfna funkcija na Ω uvijek imati primitivnu funkciju na Ω.

Zvjezdasti skupovi

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **zvjezdast** ako postoji $z_0 \in \Omega$ sa svojstvom da je $[z_0, z] \subseteq \Omega$ za sve $z \in \Omega$.

Točku z_0 s ovim svojstvom nazivamo **centrom zvjezdastog skupa** Ω.

Na primjer, trokut i krug su zvjezdasti skupovi, dok kružni vijenac to nije.

U slučaju kruga i trokuta, za točku z_0 možemo uzeti bilo koju točku trokuta, odnosno kruga.

Uočite da je svaki konveksan skup zvjezdast, dok obratno ne vrijedi (primjer: zvijezda).

Cauchyjev teorem za zvjezdasti skup. Neka je Ω zvjezdast skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada f ima primitivnu funkciju na Ω.

Dokaz. Primitivna funkcija F za f konstruira se na sljedeći način.

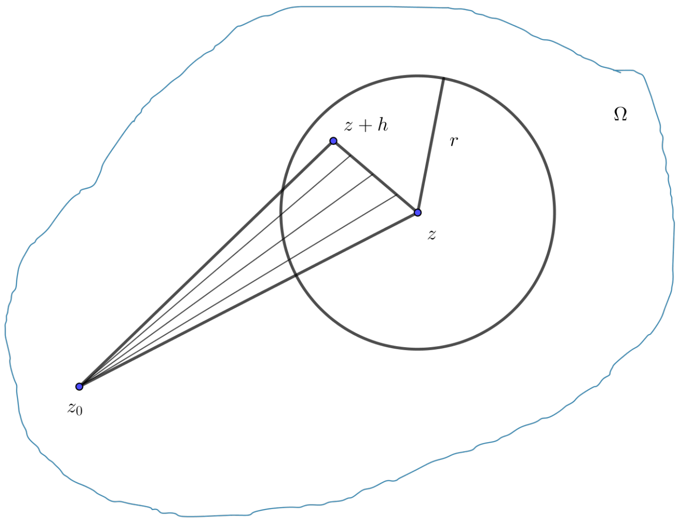
Neka je $z_0 \in \Omega$ centar zvjezdastog skupa Ω. Tada je $[z_0, z] \in \Omega$ za sve $z \in \Omega$, pa možemo definirati funkciju

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[z_0,z]} f.$$

Pokažimo da je to doista primitivna funkcija, odnosno da je $F'(z) = f(z), z \in \Omega$.

Uzmimo neki $z \in \Omega$. Kako je Ω otvoren, možemo naći $r > 0$ takav da je $K(z, r) \subseteq \Omega$.

Za sve $h \in K(0, r)$ vrijedi $z + h \in K(z, r)$, pa onda i $[z, z + h] \subseteq \Omega$.



Kako je Ω zvjezdast (sa središtem z_0), to je

$$[z_0, w] \subseteq \Omega, \quad \forall w \in [z, z+h].$$

Trokut

$$\Delta_h := < z_0, z, z+h >$$

s vrhovima $z_0, z, z+h$ je unija segmenata kao gore, pa je čitav taj trokut sadržan u Ω.

Sada nam Goursat-Pringsheimov teorem daje

$$\int_{\partial \Delta_h} f = 0, \quad \forall h \in K(0, r). \tag{1}$$

Rub trokuta Δ_h sastoji se od segmenata $[z_0, z]$, $[z, z+h]$ i $[z+h, z_0]$, pa slijedi da za svaki $h \in K(0, r)$ vrijedi

$$0 = \int_{\partial \Delta_h} f = \int_{[z_0, z]} f + \int_{[z, z+h]} f + \int_{[z+h, z_0]} f.$$

Odatle je

$$\int_{[z, z+h]} f = \int_{[z_0, z+h]} f - \int_{[z_0, z]} f = F(z+h) - F(z).$$

Sada ponavljamo račun proveden u dokazu Cauchyjevog teorema za derivaciju:

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)(z+th)' dt \\
&= \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z+th) dt = (\ f \text{ je neprekidna }) \\
&= \int_0^1 \lim_{h \to 0} f(z+th) dt = f(z) \int_0^1 dt = f(z).
\end{aligned}$$

Time je dokaz gotov. $\square$

Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju i prethodnom teoremu dobivamo ekvivalentnu formulaciju Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup.

Korolar. Neka je Ω zvjezdast skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada je

$$\int_\gamma f = 0$$

za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.

Primjer Funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definirana kao $f(z) = \frac{1}{z}$ je derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Već smo uočili da f nema primitivnu fukciju na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sjetimo se, zahvaljujući Cauchyjevom teoremu za derivaciju dovoljno je bilo pronaći po dijelovima gladak zatvoren put γ u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $\int_\gamma \frac{1}{z} dz \neq 0$.

Primjer takvog puta je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \gamma(t) = re^{it},$$

gdje je r bilo koji pozitivan broj.

Promatrajmo sada restrikciju funkcije f, odnosno, uzmimo manju domenu, neku koja ne sadrži upravo spomenute kružnice.

Uzmimo $\Omega := \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Očito je Ω zvjezdast skup, jer za npr. $z_0 = 1$ vrijedi $[z_0, z] \subseteq \Omega$ za sve $z \in \Omega$.

Prema Cauchyjevom teoremu za zvjezdast skup zaključujemo da $f(z) = \frac{1}{z}$ ima primitivnu funkciju na Ω.

Još znamo i to da je primitivna funkcija zadana formulom

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z} dz,$$

gdje je γ_z proizvoljan po dijelovima gladak put u Ω od z_0 do z.

Odaberimo γ_z koji se sastoji od segmenta $[1, r]$, gdje je $r = |z|$, te luka kružnice $\partial K(0, r)$ od r do z (luk ne smije sijeći negativni dio x-osi).

Tada je

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 \frac{1}{1 + (r-1)t} (1 + (r-1)t)' dt + \int_0^{\arg(z)} \frac{1}{re^{i\varphi}} (re^{i\varphi})' d\varphi \\ &= \ln r + i \arg(z) = \ln z. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0].$$

Zadatak Neka je $f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je $\int_{\partial \Delta} f = 0$ za sve trokute $\Delta \subseteq K(z_0, r)$. Dokažite da tada f ima primitivnu funkciju.

Uputa: Analizirajte dokaz Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup i uočite da nam je derivabilnost od f trebala samo da bismo mogli primijeniti Goursat-Pringsheimov teorem i dobiti da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za sve trokute $\Delta \subseteq K(z_0, r)$, što je u ovom zadatku pretpostavljeno da već vrijedi.

Napomena: Kasnije ćemo vidjeti da postojanje primitivne funkcije za f povlači holomorfnost od f, pa će iz ovog zadatka odmah slijediti Morerin teorem koji će nam trebati da vidimo da su izvjesni limesi nizova holomorfnih funkcija također holomorfne funkcije.

Korolar (Tehnička napomena). Neka je $f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f derivabilna na $K(z_0, r) \setminus \{w\}$, gdje je w neka točka u $K(z_0, r)$. Tada f ima primitivnu funkciju na $K(z_0, r)$.

Dokaz. Neka je $F : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ definirana s

$$F(z) = \int_{[w,z]} f.$$

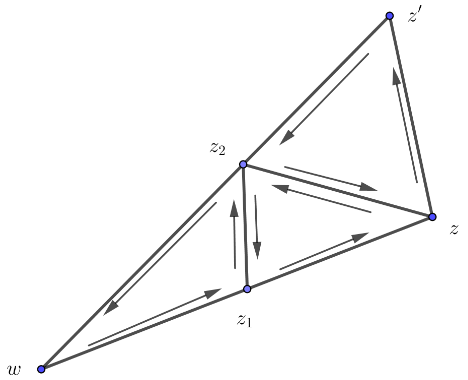
Pokažimo da vrijedi $F'(z) = f(z)$, $z \in K(z_0, r)$.

Dovoljno je dokazati da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za svaki trokut

$$\Delta = \langle w, z, z' \rangle \subseteq K(z_0, r),$$

jer nakon toga možemo nastaviti kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdasti skup (dio nakon formule (1); primijetite da su oznake drukčije jer je trokut $\langle z_0, z, z+h \rangle$ sada zamijenjen trokutom $\langle w, z, z' \rangle$).

Odaberimo bilo koje točke $z_1 \in [w, z]$ i $z_2 \in [w, z']$.



Tada je

$$\int_{\partial\langle w,z,z'\rangle} f = \int_{\partial\langle w,z_1,z_2\rangle} f + \int_{\partial\langle z_1,z,z_2\rangle} f + \int_{\partial\langle z,z',z_2\rangle} f.$$

Prema Goursat-Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial\langle z_1,z,z_2\rangle} f = \int_{\partial\langle z,z',z_2\rangle} f = 0,$$

jer su trokuti $\langle z_1, z, z_2\rangle$ i $\langle z, z', z_2\rangle$ sadržani u $K(z_0, r) \setminus \{w\}$, gdje je f derivabilna.

Zato je

$$\int_{\partial\langle w,z,z'\rangle} f = \int_{\partial\langle w,z_1,z_2\rangle} f, \quad \forall z_1 \in [w,z], \forall z_2 \in [w,z'].$$

Tvrdimo da za $z_1 \to w,\ z_2 \to w$ integral s desne strane zadnje jednakosti teži u 0.

Naime, zbog neprekidnosti f u w, f možemo ograničiti brojem M na nekom krugu $K(w, \rho) \subset K(z_0, r)$.

Za $z_1, z_2 \in K(w, \rho)$, trokut $\langle w, z_1, z_2\rangle$ je sadržan u $K(w, \rho)$, pa fundamentalna ocjena daje

$$\left| \int_{\partial\langle w,z_1,z_2\rangle} f \right| \leq M \text{ opseg}\langle w, z_1, z_2\rangle,$$

što teži u 0 za $z_1 \to w,\ z_2 \to w$.

Slijedi da je

$$\int_{\partial\langle w,z,z'\rangle} f = 0. \qquad \square$$

Neka je sada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$ parametrizacija kružnice sa središtem u z_0 radijusa r.

Tada je

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0, \quad n \neq 1,$$

jer podintegralna funkcija ima primitivnu funkciju na otvorenom skupu $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Za $n = 1$ direktno (tj. po definiciji integrala) izračunamo da je

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

U sljedećoj lemi ćemo vidjeti da vrijednost integrala ostaje ista i ako umjesto središta kružnice z_0 stavimo bilo koju točku kruga $K(z_0, r)$.

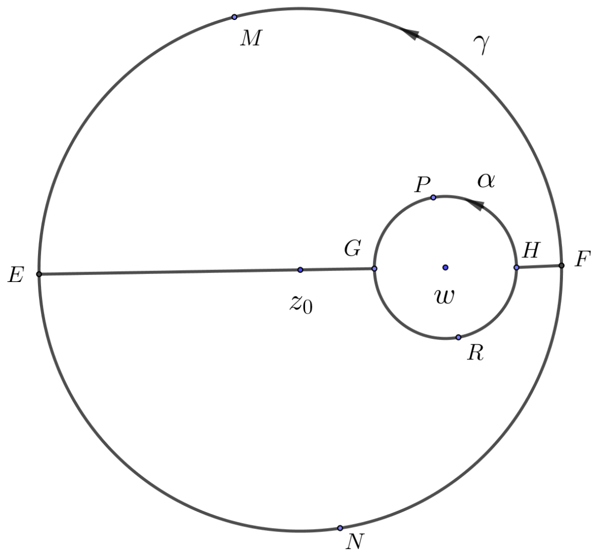
Lema. Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Tada je

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Dokaz. Neka je $w \neq z_0$ i $\delta > 0$ takav da je $z_0 \notin K(w, \delta)$ i $K(w, \delta) \subseteq K(z_0, r)$.

Neka je α parametrizacija kružnice $\partial K(w, \delta)$ dana s

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \alpha(t) = w + \delta e^{it}.$$



Neka je γ_1 krivulja koja se sastoji od luka kružnice γ kroz točke F, M, E, zatim od segmenta $[E, G]$, pa od luka kružnice α kroz točke G, P, H i na kraju od segmenta $[H, F]$.

Neka je γ_2 krivulja koja se sastoji od luka kružnice γ kroz točke E, N, F, zatim od segmenta $[F, H]$, pa od luka kružnice α kroz točke H, R, G i na kraju od segmenta $[G, E]$.

Očito je

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-w} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-w} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz - \int_{\alpha} \frac{1}{z-w} dz.$$

Oba integrala s lijeve strane su jednaka nuli (iz $\mathbb{C}$ izbacimo neku zraku iz w koja ne siječe γ_1 i to je zvjezdasti skup na kojem je funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ derivabilna, pa je po Cauchyjevom teorem za zvjezdaste skupove ovaj integral jednak 0; analogno za γ_2).

Zato je

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz = \int_{\alpha} \frac{1}{z-w} dz.$$

Kako je w središte kružnice α, to prema napomenama iznad ove leme imamo $\int_{\alpha} \frac{1}{z-w} dz = 2\pi i$, odakle je

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz = 2\pi i. \qquad \square$$

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za krug).

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Dokaz. Fiksirajmo $z \in K(z_0, r)$. Definiramo funkciju $g : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$ kao

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Funkcija g je derivabilna na $K(z_0, R) \setminus \{z\}$, te neprekidna na cijelom $K(z_0, R)$.

Prema Tehničkoj napomeni funkcija g ima primitivnu funkciju na $K(z_0, R)$ i zato je $\int_\gamma g = 0$.

Tada

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw \\ &= \text{(po Lemi)} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \cdot 2\pi i, \end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja. □

Pokazat će se da je Cauchyjeva integralna formula (CIF) ključna tvrdnja o holomorfnoj funkciji f, jer je podintegralna funkcija u formuli vrlo jednostavna kao funkcija od z.

Sljedeći put ćemo vidjeti da deriviranjem ispod znaka integrala dobivamo postojanje svih derivacija funkcije f, kao i formulu (generalizirana CIF) za te derivacije.

Kasnije ćemo vidjeti da se koristeći CIF funkciju f može razviti u red potencija.